CUADERNILLO 3

Nueva carpeta de Matemática VI

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

3. Análisis matemático I 3
Revisión inicial 4
Aproximación intuitiva al concepto de límite 5
Límites laterales 6
Límite de una función en un punto 7
Cálculo de límites 8
Límites en el infinito 9
Algunas indeterminaciones en el cálculo de límites 10
Continuidad 11
Asíntotas 13
La derivada de una función y su interpretación geométrica 14
Derivada de una función en un punto 15
Función derivada 16
Cálculo de derivadas 17
Tabla de derivadas 17
Reglas de derivación 17
Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena 18
En el mundo real 19
El ritmo respiratorio 19
Aventura de alto vuelo 20
Más actividades 21
Autoevaluación 22

AIQUE

Este CUADERNILLO 3 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática VI.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Leda Rensin - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupí y Claudia garcía en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0078-7
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

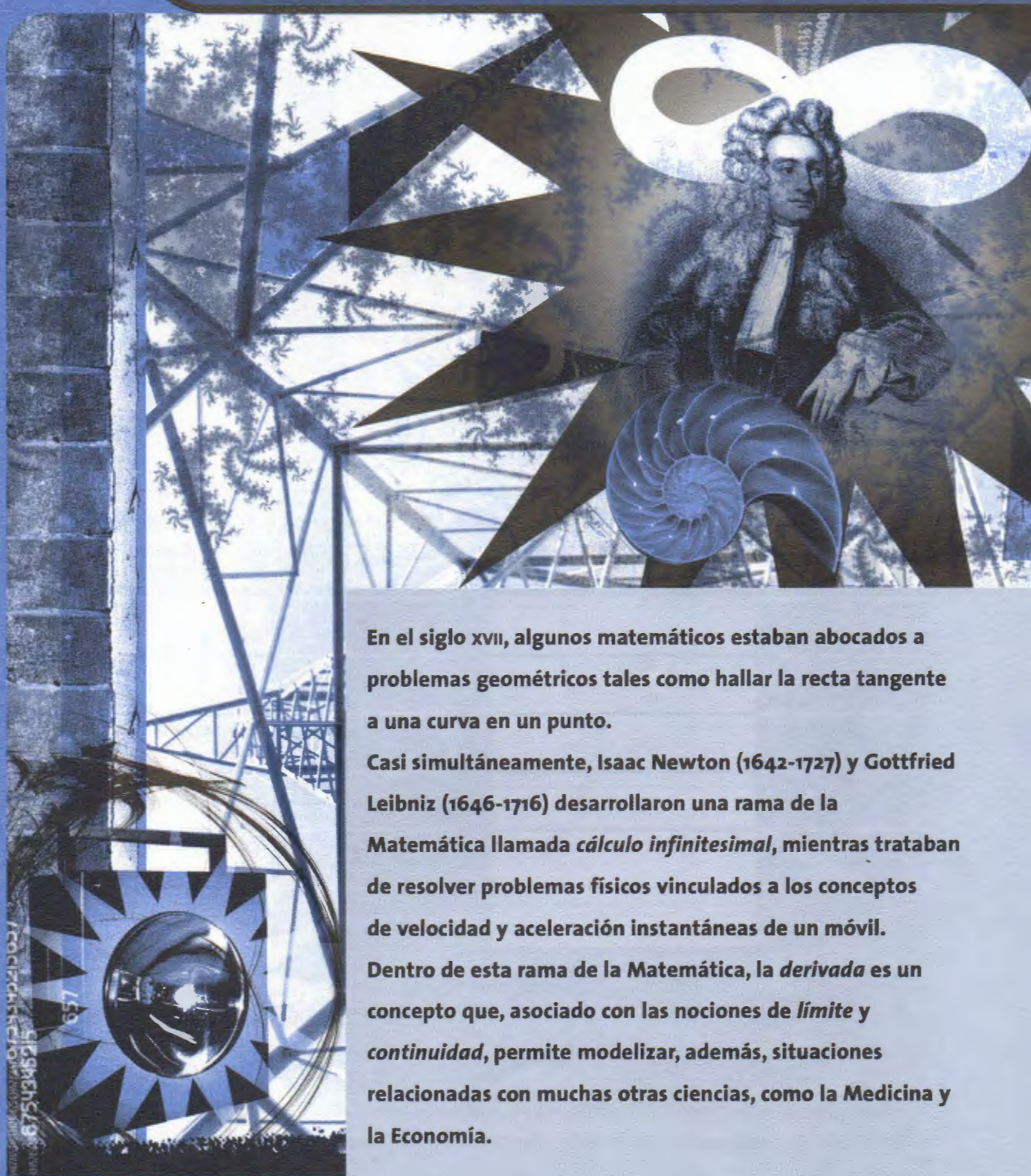
Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática VI / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Luis Garaventa ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
176 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0078-7

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Garaventa, Luis III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

3 ANÁLISIS MATEMÁTICO I



En el siglo XVII, algunos matemáticos estaban abocados a problemas geométricos tales como hallar la recta tangente a una curva en un punto.

Casi simultáneamente, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) desarrollaron una rama de la Matemática llamada *cálculo infinitesimal*, mientras trataban de resolver problemas físicos vinculados a los conceptos de velocidad y aceleración instantáneas de un móvil.

Dentro de esta rama de la Matemática, la *derivada* es un concepto que, asociado con las nociones de *límite* y *continuidad*, permite modelizar, además, situaciones relacionadas con muchas otras ciencias, como la Medicina y la Economía.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Hallen el dominio de las siguientes funciones. Simplifiquen siempre que sea posible.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 9}$

d) $f(x) = \frac{9}{x^2 + 9}$

e) $f(x) = \ln(x - 1)$

f) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

g) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

h) $f(x) = \sqrt{x}$

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

j) $f(t) = \frac{t-4}{\sqrt{t} - 2}$

k) $f(m) = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2m - 3}$

l) $f(r) = \frac{r^3 - 1}{r^2 - 1}$

2 Representen gráficamente.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2$

b) $f(x) = log(-x + 1)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 2 \\ log(x - 2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

3 Consideren las siguientes funciones. Con ayuda de una calculadora científica, hallen las imágenes pedidas. (Anoten todas las cifras que aparecen en el visor). Luego, respondan a las preguntas.

x	$g(x) = 0{,}2^x + 1$
10	
100	
10^3	
10^{10}	
10^{15}	
10^{20}	

x	$h(x) = \log_2 x$
0,5	
0,3	
0,1	
0,01	
10^{-5}	
10^{-10}	

a) ¿A qué valor se aproximan las imágenes de $g(x)$ cuando x toma valores "muy grandes"?

.....

b) ¿Qué ocurre con las imágenes de $h(x)$ cuando x toma valores "muy cercanos" a 0?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Aproximación intuitiva al concepto de límite

4 Completen las siguientes tablas y respondan a las consignas.

$f(x) = 3x + 7$			
Si $x > 1$		Si $x < 1$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,5		0,3	
1,3		0,5	
1,1		0,7	
1,01		0,9	
1,001		0,99	
1,0001		0,999	
1,00001		0,9999	
1,000001		0,99999	

$g(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$			
Si $x > 2$		Si $x < 2$	
x	$g(x)$	x	$g(x)$
2,5		1,3	
2,3		1,5	
2,1		1,7	
2,01		1,9	
2,001		1,99	
2,0001		1,999	
2,00001		1,9999	
2,000001		1,99999	

a) ¿Qué observan en las imágenes de $f(x)$ cuando los valores del dominio se acercan a $x = 1$?

.....

b) ¿Qué observan en las imágenes de $g(x)$ cuando los valores del dominio se acercan a $x = 2$?

.....

c) Completen: Dominio de f: .....; Dominio de g: .....

d) Si es posible, calculen $f(1)$ y $g(2)$.

.....

e) Comparen los valores hallados en **d)** con lo que respondieron en **a)** y **b)**.

.....

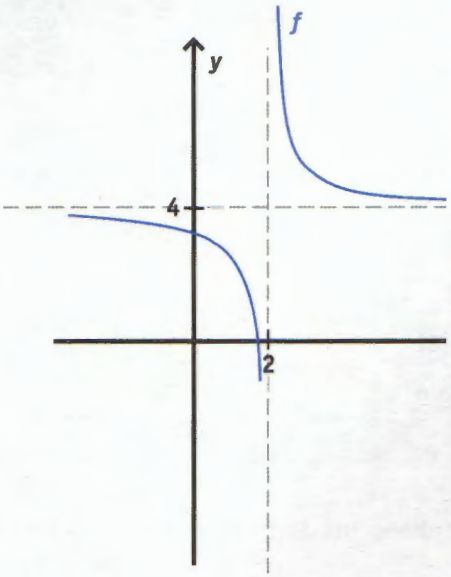
Para observar

En este capítulo trabajaremos con algunas herramientas del *análisis matemático*, comenzando por el concepto de *límite*. En relación con este concepto, como con muchos otros, en este texto no trabajaremos con definiciones y demostraciones formales, sino con aproximaciones conceptuales que nos permitirán aplicar algunas de sus propiedades en la profundización del estudio de funciones.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Límites laterales

Para observar



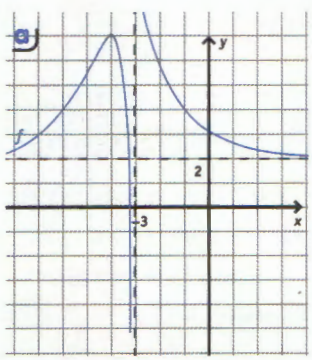
A los límites "por derecha" y "por izquierda" de una función en un punto los llamamos *límites laterales*.

En la gráfica siguiente podemos obervar esto:

- Cuando los valores de x se aproximan a 2 "por la derecha", $f(x)$ toma valores cada vez mayores.
  Decimos, entonces, que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 *por derecha* es *más infinito*" y lo simbolizamos de la siguiente manera:
  $$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$
- Cuando los valores de x se aproximan a 2 "por la izquierda", $f(x)$ toma valores cada vez menores.
  Decimos, entonces, que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 *por izquierda* es *menos infinito*" y lo simbolizamos de la siguiente manera:
  $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$
- Cuando los valores de x son cada vez mayores, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 4.
  Decimos, entonces, que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es 4" y lo simbolizamos de la siguiente manera:
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$$
- Cuando los valores de x son cada vez menores, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos a 4.
  Decimos, entonces, que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es 4" y lo simbolizamos de la siguiente manera:
  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$$

5 Completen.

a)



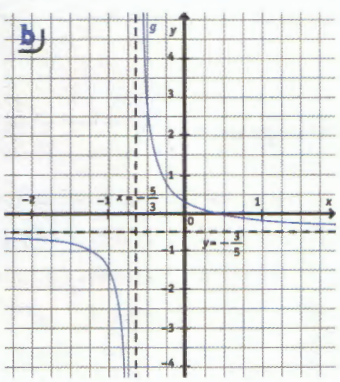
$\lim_{x \to -3^-} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to -3^+} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ .....

b)



$\lim_{x \to -\frac{5}{3}^-} g(x) =$ .....

$\lim_{x \to -\frac{5}{3}^+} g(x) =$ .....

$\lim_{x \to -\infty} g(x) =$ .....

$\lim_{x \to +\infty} g(x) =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Límite de una función en un punto

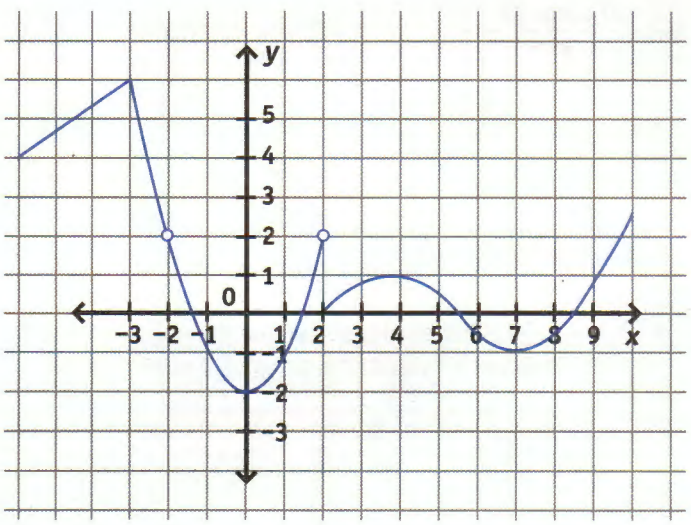
Para leer y recordar

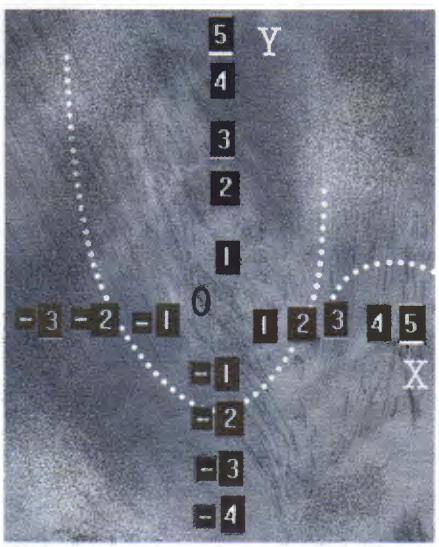
- Consideramos una función $f(x)$ y un valor a, que puede pertenecer o no al dominio de f. Decimos que el *límite* de f cuando x tiende a a es L, si las imágenes de $f(x)$ se aproximan a L, cuando los valores de la variable x se aproximan a a.

Simbólicamente, lo escribimos así: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

- Observamos a qué imagen nos acercamos por ambos lados. Si la imagen es la misma por ambos lados, ese es el límite buscado. Si no lo es, entonces, el límite no existe.

6 Observen el gráfico y completen los límites pedidos.





a) $f(-3) =$ .....

b) $f(-2) =$ .....

c) $f(2) =$ .....

d) $\lim_{x \to -3^-} f(x) =$ .....

e) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ .....

f) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ .....

g) $\lim_{x \to -3^+} f(x) =$ .....

h) $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ .....

i) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ .....

j) $\lim_{x \to -3} f(x) =$ .....

k) $\lim_{x \to -2} f(x) =$ .....

l) $\lim_{x \to 2} f(x) =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cálculo de límites

7 Consideren las funciones $f(x) = 3x^2 + 5$ y $g(x) = x$.

a) Asignen valores a c y comprueben las siguientes propiedades:

I. $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$

II. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

III. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

IV. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

V. $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$

VI. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n \ (n \in \mathbb{Q})$

b) Escriban en un lenguaje coloquial y generalizado las propiedades anteriores.

c) ¿Qué condiciones se deben considerar para poder aplicar las propiedades V y VI?

8 Calculen los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} (x - 1)^4 + 3$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{5x + 9}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{10 \cdot \log_6 (x + 7)}{x^2 + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \log_3 (24x + 33)^x$

e) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos (3x)$

f) $\lim\limits_{x \to e} x \cdot \ln \dfrac{1}{x}$

9 Completen la siguiente tabla y respondan a las consignas.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$		$Domf(x) = R - \{0\}$	
Si $x > 0$		Si $x < 0$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,5		-0,5	
0,3		-0,3	
0,1		-0,1	
0,01		-0,01	
0,001		-0,001	
0,0001		-0,0001	
0,00001		-0,00001	
0,000001		-0,000001	

a) ¿Qué se observa en las imágenes de $f(x)$ para valores del dominio cercanos a 0?

.....

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ .....

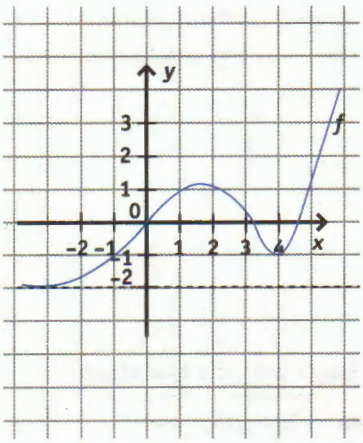
10 Representen gráficamente una función $f(x)$ tal que $Domf(x) = \mathbb{R} - \{2\}$ y, además, cumpla las siguientes condiciones:

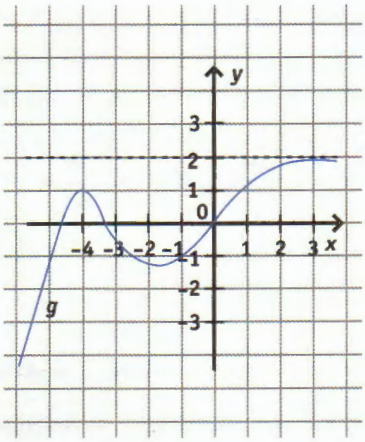
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

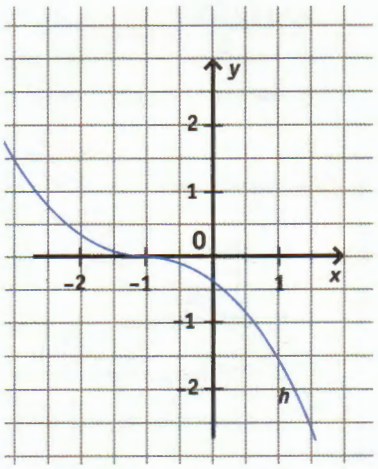
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Límites en el infinito

11 Observen las gráficas y completen lo pedido.







$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ ..... $\lim_{x\to+\infty} h(x) =$ .....

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ ..... $\lim_{x\to-\infty} g(x) =$ ..... $\lim_{x\to-\infty} h(x) =$ .....

12 Utilicen notación científica, completen la siguiente tabla y respondan.

$f(x) = \frac{1}{x}$		$Dom f(x) = R - \{0\}$	
Si $x > 0$		Si $x < 0$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
10		-10	
100		-100	
1000		-1000	
10 000		-10 000	
100 000		-100 000	
1 000 000		-1 000 000	
10 000 000		-10 000 000	
100 000 000		-100 000 000	

a) ¿Cuál es el comportamiento de las imágenes $f(x)$ para valores muy grandes positivos?

.....

.....

b) ¿Cuál es el comportamiento de las imágenes de $f(x)$ para valores muy grandes negativos?

.....

.....

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ .....

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ .....

13 Representen gráficamente las funciones $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$, $h(x) = \frac{1}{x^4}$, $j(x) = -\frac{1}{x^6}$. Indiquen, para cada una, qué ocurre con las imágenes cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Algunas indeterminaciones en el cálculo de límites

Para leer y recordar

- Puede ocurrir que, cuando calculamos límites de funciones a través de un cálculo, aparezcan expresiones en las cuales no es posible llegar a un valor determinado. A estos casos los llamamos *indeterminaciones*.
- Algunas de las determinaciones que pueden presentarse son las siguientes:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^0 \qquad 0 \cdot \infty \qquad 0^0$$

- Algunos de estos límites pueden resolverse mediante el uso de recursos algebraicos, como por ejemplo :

- La factorización.
- La división de numerador y denominador por la variable elevada a la mayor potencia que aparezca.
- La multiplicación del denominador o el numerador por el conjugado de cualquiera de ellos.
- Propiedades de logaritmos.

14 Para cada uno de los siguientes ejemplos:

a) Escriban debajo, las indeterminaciones que aparecen.

I. $\lim_{x\to 1} \frac{1+x}{x^2-1} - \frac{x^2}{x-1}$ .....

II. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{3x^2+x-4}$ .....

III. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x}$ .....

IV. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ .....

V. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ .....

VI. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ .....

VII. $\lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{x^2}$ .....

VIII. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ .....

b) Resuelvan los límites anteriores.

15 Calculen los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{3x^2-x-10}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}$

e) $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{4\sqrt{x+1}-\sqrt{32}}{x-1}$

g) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x-3}{x+4}$

h) $\lim_{x\to \infty} \frac{x-4x^3}{x^4-1}$

i) $\lim_{x\to \infty} \frac{12x^2-5x}{x+3}$

j) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}+2}{x}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Continuidad

Para leer y recordar

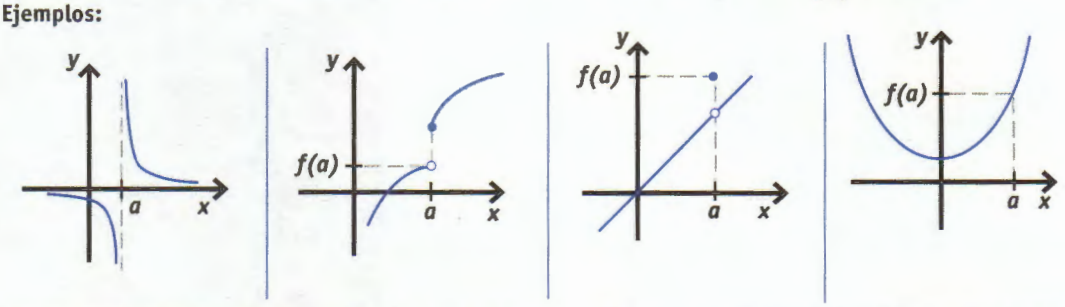
- Una función es *continua* en un punto de abscisa $x = a$ si se verifica la siguiente igualdad: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- El significado de esta definición requiere que se cumplan tres condiciones:

I. Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$.

II. Que exista $f(a)$, o sea, que a pertenezca al dominio de f.

III. Que coincidan el límite y la imagen de la función en ese punto, es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ejemplos:



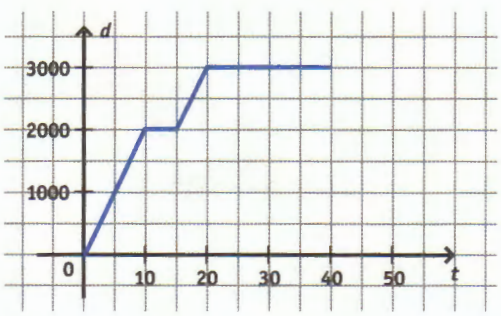
Las tres primeras funciones graficadas son discontinuas en $x = a$. La cuarta función graficada es continua en $x = a$.

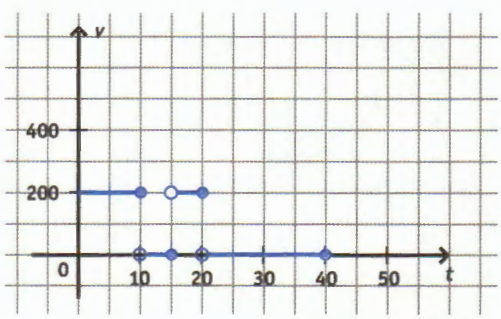
- Si una función no es continua en un punto, pero el límite existe, decimos que la discontinuidad es *evitable*.
- Si una función no es continua en un punto y tampoco existe el límite, decimos que la discontinuidad es *esencial*.

16 Un ciclista se desplaza a velocidad constante, cuando va desde la escuela a su casa, por una calle recta. Al pasar por una panadería, se detiene unos minutos para comprar la merienda. Luego, sigue su marcha hasta llegar a destino, y finalmente, guarda su rodado.

En el gráfico 1 se representa la distancia d (en metros) recorrida por el ciclista, en función del tiempo t (en minutos), mediante una función definida por partes.

En el gráfico 2, se representa la velocidad v (en metros por minuto), en función del tiempo t (en minutos). Esta es otra función definida por partes.





a) Escriban la fórmula de la función $d(t)$ para $0 \leq t \leq 40$.

b) Escriban la función $v(t)$ correspondiente al mismo período.

c) Estudien la continuidad de $d(t)$ y de $v(t)$ para $t = 15$.

d) ¿Qué tipo de discontinuidad presenta $v(t)$ en $t = 20$?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

17 Analicen la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} e^{x-1} & si\ x \leq 1 \\ \log_2 x & si\ x > 1 \end{cases}$

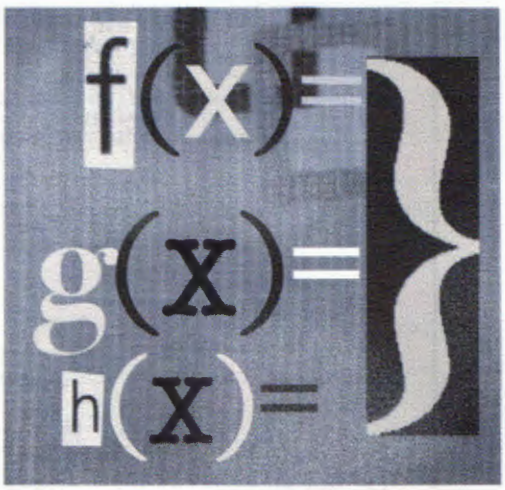
c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-5} & si\ x \neq 5 \\ 2 & si\ x = 5 \end{cases}$

18 Hallen, en cada caso, el valor de a para que la función sea continua en el cambio de tramo.

a) $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & si\ x < -1 \\ x^2 - 2x + 5 & si\ x \geq -1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} - a & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{4-x} + a & si\ x > 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 6x - 9}{x - 1} & si\ x \neq 1 \\ 6a & si\ x = 1 \end{cases}$



19 Una tapicería vende cuero ecológico a $18 el m^2 y ofrece una promoción según la cual por la compra de más de 10 m^2 el costo por m^2 disminuye la tercera parte.

a) Escriban la fórmula por tramos del precio del cuero p (en $) en función de la cantidad c (en m^2).

b) ¿Cómo se calcula el precio para $c = 10$ m^2? Justifiquen la respuesta.

c) Analicen la continuidad de $p(c)$ en $c = 10$ m^2.

20 Estudios realizados por un equipo de biólogos dieron como resultado que en el siglo XX la tala de bosques creció según el siguiente modelo funcional, siendo $N(t)$ la cantidad de toneladas taladas en t años.

$$N(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 2 & si\ t \leq 75 \\ 0{,}5\ t^2 & si\ t > 75 \end{cases}$$

a) ¿Cuántas toneladas se talaron al terminar las primeras tres cuartas partes del siglo XX?

.....

b) ¿Cuántas toneladas se talaron al comenzar la última cuarta parte del siglo XX?

.....

c) ¿Se puede asegurar cuántas toneladas se talaron a los 75 años, según este modelo?

.....

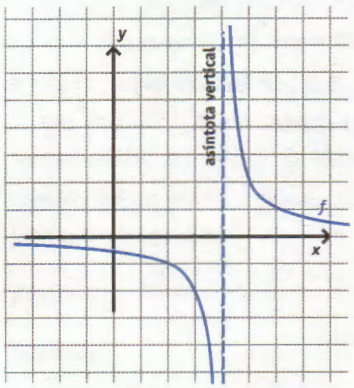
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Asíntotas

Para leer y recordar

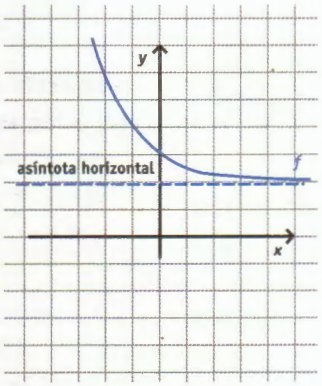
- La recta de ecuación $x = a$ es *asíntota vertical* de $f(x)$, si se cumple que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$



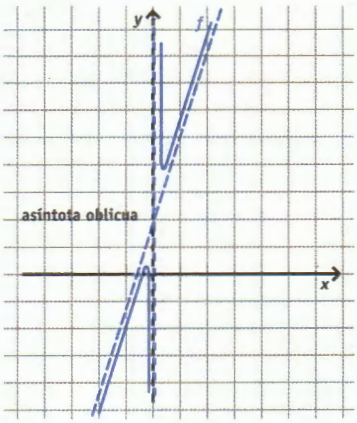
- La recta de ecuación $y = b$ es *asíntota horizontal* de $f(x)$ si se cumple que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$



- La recta de ecuación $x = mx + b$ es *asíntota oblicua* de $f(x)$ si se cumple que

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$



Podemos hallar la pendiente m y la ordenada al origen b de una asíntota oblicua mediante el cálculo de los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

21 Para cada una de las siguientes funciones, indiquen dominio, puntos de discontinuidad y ecuaciones de las asíntotas.

a) $h(x) = \dfrac{4}{x - 3}$

b) $n(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 3}$

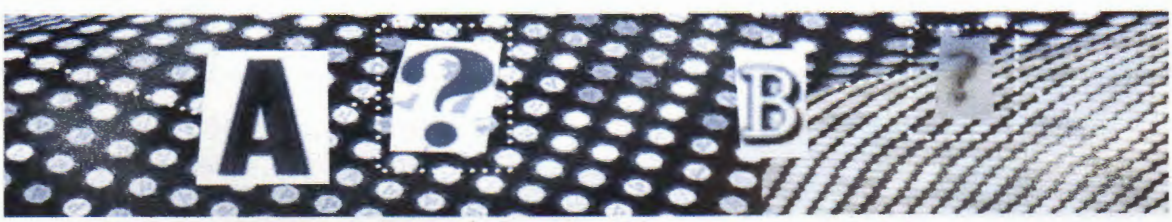
c) $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 5x - 10}{x^2 - 5x + 6}$

e) $j(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{1 - x}$

f) $m(x) = -8 \cdot 2^{-x} + 2$

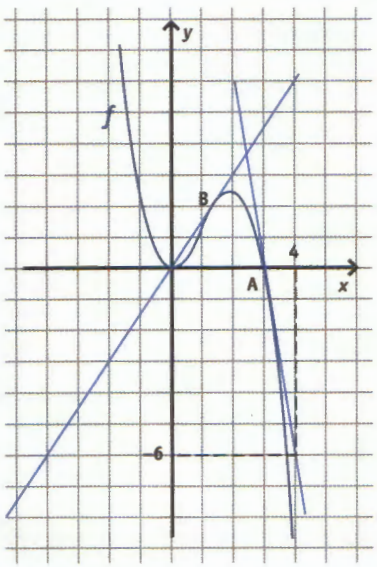
22 Consideren la función $f(x) = \dfrac{ax + 1}{bx - 3}$. Hallen los valores de a y b, para que f tenga una asíntota vertical de ecuación $x = \dfrac{1}{2}$ y una asíntota horizontal de ecuación $y = -2$.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La derivada de una función y su interpretación geométrica

Para leer y recordar



Dada una función $f(x)$ y un punto de abscisa x_0 perteneciente a ella, a la derivada de la función $f(x)$ en $x = x_0$ la llamamos $f'(x_0)$ y la interpretamos geométricamente como la *pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x_0*.

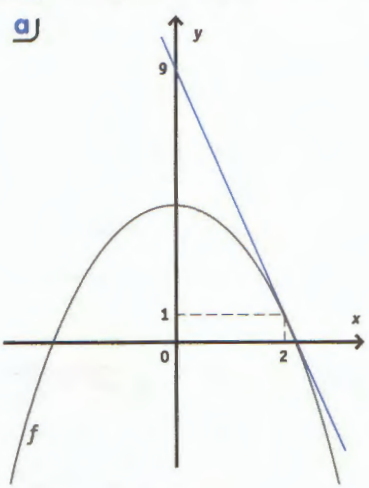
Ejemplo:

En el gráfico de la izquierda se muestra la función $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2$ y rectas tangentes a ella en los puntos A y B.

Recta tangente a $f(x)$ que pasa por el punto	y por el punto	Fórmula de la recta tangente	Pendiente de la recta tangente	Derivada de $f(x)$ en x_0
A = (3; 0)	(4; −6)	$y = -6x + 18$	−6	$f'(3) = -6$
B = $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$	(0; 0)	$y = \frac{3}{2}x$	$\frac{3}{2}$	$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

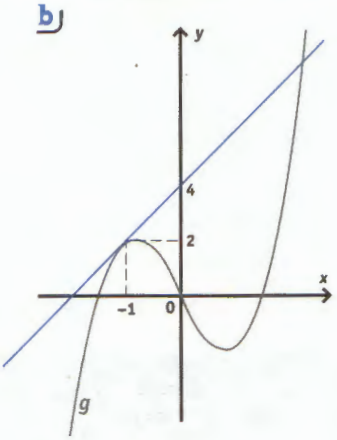
23 Averigüen las pendientes de las rectas tangentes trazadas en cada gráfica y completen lo pedido.

a)



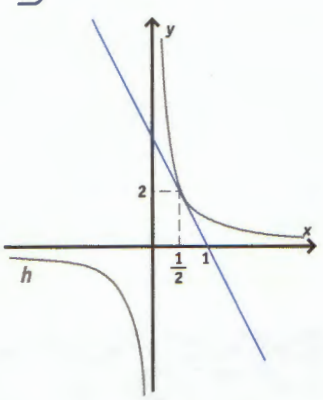
$f'(2) =$ .....

b)



$g'(-1) =$ .....

c)



$h'\left(\frac{1}{2}\right) =$ .....

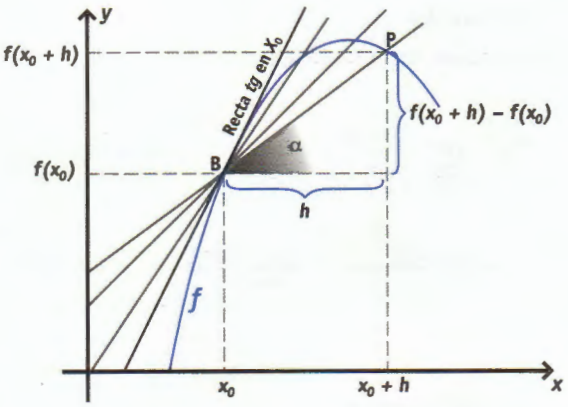
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Derivada de una función en un punto

Para leer y recordar

En el gráfico:

$$tg\,\hat{\alpha} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



A medida que P se acerca a B (tiende a B), h se hace muy pequeño (tiende a *cero*) y las pendientes de las rectas secantes BP se van aproximando a la pendiente de la recta tangente en B, que es $f'(x_0)$.

Formalmente, definimos la derivada de una función en un punto a través de un límite de la siguiente manera:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo:

La derivada de $f(x) = 3x + 4$ en $x_0 = 5$ se calcula de la siguiente manera:

- Hallamos $f(5 + h) = 3h + 19$ y $f(5) = 19$
- Calculamos la derivada hallando el límite de $\frac{f(5 + h) - f(5)}{h}$ (cociente incremental).

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h + 19 - 19}{h} = 3$$

24 Observen, en la tabla, las fórmulas de las cinco funciones.

a) Completen las imágenes que se piden.

Función $f(x)$	$f(1 + h)$	$f(3 + h)$	$f(2 + h)$	$f(h)$	$f(x + h)$
I. $x - 2$	$h - 1$				$x + h - 2$
II. $\sqrt{x + 3}$					
III. $x^3 - 1$					
IV. $\sqrt{x + 1} - 5$					
V. $\frac{1}{(x + 2)^2}$					

b) Utilicen la definición de derivada para calcular $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(2)$ y $f'(0)$ para cada una de las funciones de la tabla.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Función derivada

Para observar

Si tenemos que calcular la derivada de $f(x) = 2x^2 + 1$ en $x = 1$, $x = -2$ y $x = 0$, podemos proceder de la siguiente forma:

- **Calculamos la *función derivada* $f'(x)$.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 + 1 - (2x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 1 - 2x^2 - 1}{h} =$$

(cancelamos)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h)}{h} = 4x \Rightarrow f'(x) = 4x$$

($4xh + 2h^2 \to 0$; $h \to 0$; simplificamos y calculamos el límite)

- **Luego hallamos:**

$f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$ $\quad$ $f'(-2) = 4 \cdot (-2) = -8$ $\quad$ $f'(0) = 4 \cdot 0 = 0$

25 Hallen las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$ $\quad$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ e) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ d) $f(x) = (x + 1)^2$ $\quad$ f) $f(x) = 7$

26 Hallen las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 1$ $\quad$ c) $f(x) = 2x^3 + 1$ $\quad$ e) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x - 5}$ $\quad$ d) $f(x) = \sqrt{2x + 1} - 5$ $\quad$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

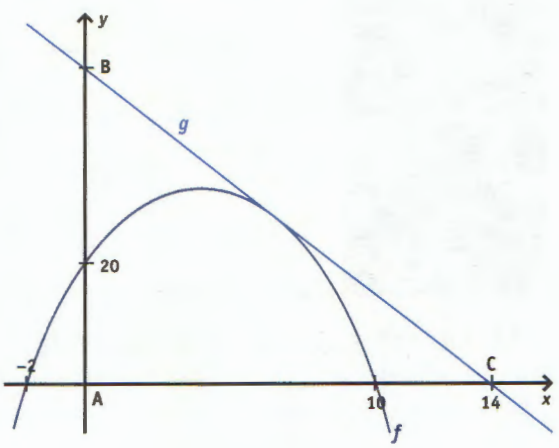
27 Hallen las fórmulas de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 8$ en $x_0 = 4$ y $x_0 = 0$.

28 Encuentren las fórmulas de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x$ en los puntos de contacto con el eje x.

29 El gráfico muestra una función cuadrática y la recta tangente a ella en (6; 32).

a) Encuentren la fórmula de la función cuadrática.

b) Calculen el área del $\overset{\Delta}{ABC}$.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cálculo de derivadas

Para leer y recordar

Utilizando la definición de "derivada", es posible calcular, siempre que exista, la derivada de cualquier función. Algunas derivadas figuran en esta tabla.

Tabla de derivadas

$f(x)$	k	x^n	$\sqrt{x}$	$sen\ x$	$cos\ x$	$ln\ x$	a^x	$\log_a x$	e^x
$f'(x)$	0	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$cos\ x$	$-sen\ x$	$\frac{1}{x}$	$a^x\ ln\ a$	$\frac{1}{x \cdot ln\ a}$	e^x

Ejemplos:

$f(x)$	3	x^7	4^x	$\log_2 x$	x^{12}
$f'(x)$	0	$7 \cdot x^6$	$4^x\ ln\ 4$	$\frac{1}{x \cdot ln\ 2}$	$12x^{11}$

Reglas de derivación

Las siguientes reglas de derivación serán útiles para cálculos posteriores.

Nota: consideramos *u*, *v* y *w* funciones de la variable *x*, y *k* un número real constante.

Reglas de derivación		Ejemplos	
$f(x) = u + v - w$	$f'(x) = u' + v' - w'$	$f(x) = x^3 + sen\ x - e^x$	$f'(x) = 3 \cdot x^2 + cos\ x - e^x$
$f(x) = k \cdot u$	$f'(x) = k \cdot u'$	$f(x) = 6 \cdot sen\ x$	$f'(x) = 6 \cdot cos\ x$
$f(x) = u \cdot v$	$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$	$f(x) = x^3 \cdot sen\ x$	$f'(x) = 3x^2 \cdot sen\ x + x^3 \cdot cos\ x$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{x^3}{sen\ x}$	$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot sen\ x - x^3 \cdot cos\ x}{sen^2 x}$

30 Deriven la siguientes funciones aplicando las reglas de derivación.

a) $f(x) = x^4 - x$

b) $f(x) = x^2 - ln\ x$

c) $f(x) = x \cdot cos\ x$

d) $f(x) = 3x^4 + 1$

e) $f(x) = x^5 \cdot e^x$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

g) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

h) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 1}$

31 Comprueben las equivalencias de la siguiente tabla de derivadas aplicando las reglas de derivación.

$f(x)$	$tg\ x$	$cotg\ x$	$sec\ x$	$cosec\ x$
$f'(x)$	$sec^2 x$	$-cosec^2 x$	$sec\ x\ tg\ x$	$-cosec\ x\ cotg\ x$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena

Para leer y recordar

Si $h(x) = f[g(x)]$, entonces $h'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$.

Ejemplo:

La función $h(x) = sen(x^5)$ puede pensarse como la composición de dos funciones $h(x) = (f \circ g)(x)$ donde $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = x^5$.

Entonces, la derivada de $h(x) = sen(x^5)$ se calcula de la siguiente forma:

$$h'(x) = \underbrace{cos(x^5)}_{f'[g(x)]} \cdot \underbrace{5x^4}_{g'(x)}$$

32 Completen la tabla.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$(cos\ x)^3$	$3 \cdot (cos\ x)^2 \cdot$	$cos\ x^3$	$-sen\ x^3 \cdot$ .....
$ln^2 x$	$2 \cdot ln\ x \cdot$	$ln\sqrt{x}$	..... $\cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$ .....
$ln(x^3)$	$\frac{1}{x^3} \cdot$ ..... = ...	$ln(sen\ x^2)$	..... $\cdot cos\ x^2 \cdot$ ..... = ...
$\sqrt{ln\ x}$	..... $\cdot \frac{1}{x} =$	$(x^2 + 1)^4$	$4 \cdot ($.....$) \cdot$ ..... = ...

33 Calculen las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$

b) $f(x) = \frac{1 + cos\ x}{1 - cos\ x}$

c) $f(x) = sen\sqrt{x}$

d) $f(x) = e^{5x}$

e) $f(x) = cos^2 x + sen^2 x$

f) $f(x) = e^{-x} \cdot sen(4x)$

34 Hallen la fórmula de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ln\sqrt{x - 1}$ en su intersección con el eje de las abscisas.

.....

35 En un punto del intervalo $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, la recta de ecuación $y = 1$ es tangente a la gráfica de $f(x) = sen\ (6x)$. Hallen sus coordenadas.

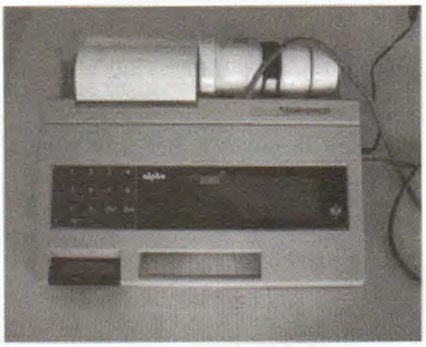
.....

36 Hallen la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x \cdot e^{2x-2} + 4$ en $x_0 = 1$ y analicen si es perpendicular a la recta de ecuación $x - \frac{1}{3}y = -3$.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El ritmo respiratorio



El proceso de respiración en las personas presenta un ritmo sujeto a variaciones que se relacionan con diversos factores, como la edad, el sexo, el tipo de actividad, el descanso, la temperatura, etc. Este proceso consiste en intervalos alternados de inhalación y exhalación.
Para estudiarlo, se utiliza un dispositivo llamado *espirómetro*, que mide y registra los volúmenes pulmonares.

37 La fórmula siguiente permite calcular el volumen de aire V (en litros) que contienen los pulmones en cierto instante de tiempo t (en minutos).

$$V(t) = 0{,}05 \,.\, sen\left(160\,\pi \,.\, t - \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

a) Construyan la gráfica de la función asociada a esta fórmula, con dominio en el intervalo $\left[0; \frac{1}{80}\right]$, y señalen en el gráfico los tramos correspondientes a la inhalación y a la exhalación de aire.

b) Para un período completo, calculen el volumen de aire que contienen los pulmones al completar el proceso de inhalación.

.....

c) Encuentren para un período completo el volumen de aire que tienen los pulmones inmediatamente después de empezar el proceso de exhalación de aire.

.....

d) ¿Qué relación encuentran entre el volumen de aire máximo de los pulmones y una recta tangente a la función dada en el instante en que de la inhalación se pasa a la exhalación?

.....

e) Relacionen el dato de la recta tangente y busquen la capacidad máxima de aire que pueden tener los pulmones.

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Aventura de alto vuelo

El *bungee jumping* es un deporte de aventura que se practica en algunos lugares de nuestro país. Consiste en arrojarse en caída libre desde grúas o puentes, sujetado a los pies o a la cintura por una soga elástica y un arnés que envuelve todo el cuerpo. La extensión de la soga supera, en muchos casos, los 25 metros.

A partir del instante en que la persona se deja caer, y antes de que la soga elástica comience a detener la caída, puede considerarse que el rozamiento con el aire no produce una resistencia al movimiento que resulte significativa.

Entonces, por ejemplo, si el saltador parte de una altura de 50 m, su altura h (en metros), en cada instante t (en segundos) posterior al lanzamiento, puede calcularse mediante esta fórmula:

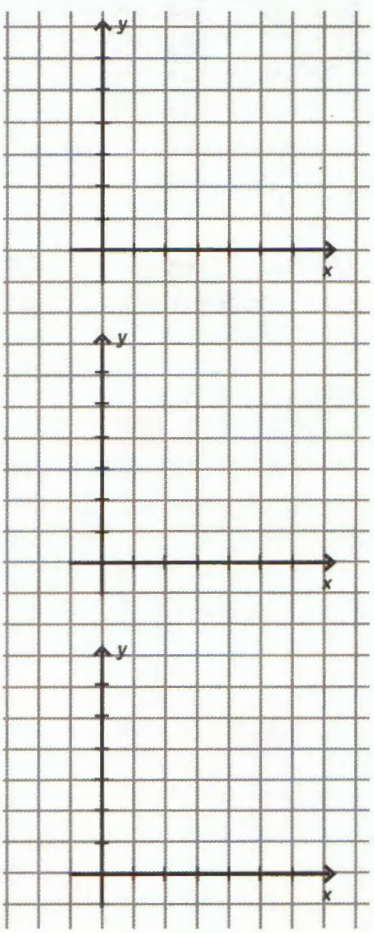
$$h(t) = 50 - 4{,}9\ t^2$$

A partir de esta, podemos obtener otra fórmula que nos permitirá calcular la velocidad v (en metros por segundo) en cada instante t, es decir, su *velocidad instantánea*. Para hacerlo, debemos calcular su derivada, es decir:

$$h'(t) = v(t)$$

A su vez, si derivamos la función asociada a la velocidad instantánea, obtendremos otra función, $a(t)$ que nos permitirá calcular la *aceleración instantánea* que tendrá el deportista en cada instante.

$$v'(t) = a(t)$$



38 Consideren la fórmula dada para $h(t)$, y obtengan las fórmulas correspondientes a $v(t)$ y $a(t)$. Representen gráficamente las tres funciones.

39 Calculen la velocidad y la aceleración a los 2 segundos.

40 Suponiendo que la soga mide 25 metros, ¿cuánto tiempo transcurre desde el comienzo del movimiento hasta el momento en el que la soga elástica se empieza a estirar? ¿Cuál será la velocidad que tendrá el deportista en ese instante?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

41 Escriban la fórmula de una función racional que cumpla las condiciones que se indican en cada caso y construyan su gráfica.

a) Tiene asíntotas verticales de ecuaciones $x = 2$ y $x = -2$.

b) Tiene asíntotas verticales de ecuaciones $x = 2$ y $x = -2$, y asíntota horizontal de ecuación $y = 1$.

c) $Dom f(x) = R - \{2; -2\}$, tiene asíntota vertical de ecuación $x = 2$, existe el $\lim_{x \to -2} f(x)$ y $\lim_{x \to} f(x) = 1$.

42 Tracen una gráfica aproximada de una función que verifique las condiciones que se enuncian.

- $\lim_{x \to -} f(x) = -$
- Existe el $\lim_{x \to -8} f(x)$
- No existe $f(-8)$
- $C^+ = (-5; -3) \cup (-1; 2)$
- $\lim_{x \to +} f(x) = 0$
- Presenta dos puntos de discontinuidad esencial: en $x = 2$ y en $x = -5$.

43 Representen en un mismo gráfico $f(x) = \ln x$ y la recta tangente que pasa por su raíz.

44 Hallen los puntos de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ para los cuales la recta tangente es horizontal.

45 En la función $f(x) = x^2 + ax + b$ hallen los valores de a y b de manera que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x_0 = 2$.

46 Hallen los puntos en los que las rectas tangentes a $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ son paralelas a la recta $y = -4x + 2$.

47 Hallen las abscisas de los puntos en los que las rectas tangentes a $f(x) = 2 \ln x^2$ y $g(x) = 2x^2 + 1$ son paralelas.

48 La altura en metros de un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba está dada por la función $h(t) = 200t - 5t^2$ donde t es el tiempo transcurrido en segundos. Calculen:

a) La velocidad para un instante t.

b) La velocidad del proyectil a los 20 segundos.

c) El tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima.

d) La altura máxima.

e) El intervalo de tiempo en que está cayendo.

f) La velocidad con que llega al suelo.

49 Una pelota es arrojada hacia arriba desde un puente. La altura que alcanza está dada por la función $h(t) = -4{,}9\ t^2 + 12t + 16{,}8$ (h en metros y t en segundos).

a) ¿Cuál es la altura del puente?

b) Encuentren por definición la función de la velocidad instantánea en función del tiempo.

c) Hallen el instante en que la velocidad se anula.

d) Determinen la altura máxima que alcanza la pelota.

e) Encuentren el valor de t para el cual la recta tangente a h tiene pendiente -8.

f) Escriban los intervalos en los que la velocidad de la pelota es negativa y los intervalos en los que es positiva.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 Consideren la función f definida por tramos.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-1} & si\ x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} & si\ x > 1 \end{cases}$$

- a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$
- b) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{2}{3}$
- c) No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$
- d) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

2 La función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ tiene la misma asíntota oblicua que la función

- a) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{x^2-4}$
- b) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+5}$
- c) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{x^2+3}$
- d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-5}$

3 La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2-4}$

- a) tiene dos asíntotas verticales.
- b) tiene dominio = $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$.
- c) no tiene ninguna asíntota vertical.
- d) no cumple con ninguna de las tres afirmaciones anteriores.

4 La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-3}{x^2-9} & si\ x > 1 \\ \dfrac{x^2}{x^2+2x} & si\ x < 1 \end{cases}$

- a) presenta discontinuidades en tres puntos.
- b) presenta discontinuidades en dos puntos.
- c) presenta discontinuidades en cuatro puntos.
- d) no presenta discontinuidades.

5 La ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = 8x - \ln x$ en $x = 1$ es

- a) $y = 7x$
- b) $y = -7x + 1$
- c) $y = -7x$
- d) $y = 7x + 1$

6 Los desplazamientos de dos móviles están dados por $S_1(t) = t^3 - 45t + 100$ y $S_2(t) = 3t^3 - 60t - 439$. En el instante en que ambos tienen la misma velocidad, las aceleraciones $a_1(t)$ y $a_2(t)$ cumplen lo siguiente:

- a) $a_1(t) > a_2(t)$
- b) $a_1(t) < a_2(t)$
- c) $a_1(t) = a_2(t)$
- d) ambas son negativas.

7 La función $f(x) = \begin{cases} b\sqrt{x}+1 & si\ x < 1 \\ ax^2 - 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$ si

- a) $a = -\frac{2}{3}$ y $b = \frac{8}{3}$
- b) $a = \frac{2}{3}$ y $b = -\frac{8}{3}$
- c) $a = 1$ y $b = 1$
- d) $a = -\frac{2}{3}$ y $b = -\frac{8}{3}$

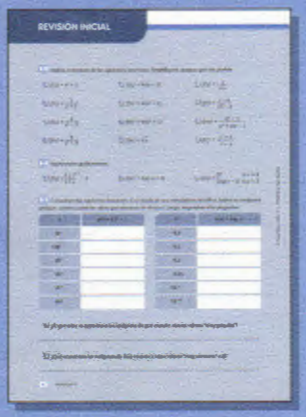
8 La función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ es

- a) continua
- b) derivable en $x = 0$
- c) discontinua en un punto.
- d) discontinua en dos puntos.

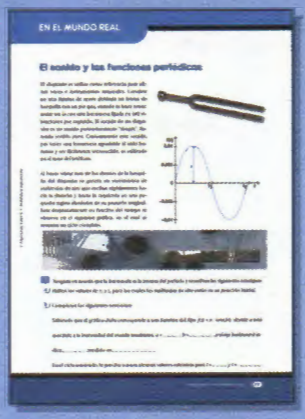
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

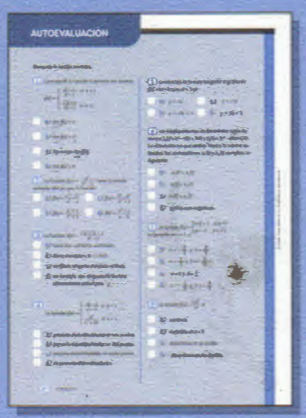


Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.



En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.

Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 4 y 6, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.

Para leer y recordar

Llamamos *función exponencial* a toda función cuya expresión sea de la forma:

$f(x) = k \cdot a^x \quad (k \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R};\ k \neq 0;\ a > 0;\ a \neq 1)$

Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).

Para observar

Decimos que una ecuación es *exponencial* cuando contiene a la incógnita en algún exponente.
Observen dos ejemplos de cómo se pueden resolver.

Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

12 ——— Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE